Chap.7 : Les suites (généralités)

I] Definitions

Une suite est « **définie de façon explicite** » si on peut la calculer directement en connaissant n.

Une suite est « **définie par une relation de récurrence** » si, pour calculer un terme, on doit connaitre le terme précédent auquel on applique des opérations.

Ex : un = 3n +5 est définie de façon explicite.

$u_{n+1} = 3u_n$ est définie par une relation de récurrence.

Remarque : En pratique, il est plus simple de connaître une suite si elle est définie de façon explicite mais, dans la réalité, elles sont souvent définies à l'aide d'une relation de récurrence. C'est pourquoi on nous demandera souvent d'étudier les suites pour exprimer leur forme explicite.

II] Suites arithmetiques

Une suite est « **arithmétique** » si on ajoute (ou retranche) un nombre r (appelé « **raison** ») pour obtenir le terme suivants.
$u_{n+1} = u_n + r$

Ex : 3 ; 7 ; 11 ; 15 ; … sont des termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r = 4 car on ajoute toujours 4.

Propriété : Pour tout n, on a $u_n = u_0 + n \times r$. C'est ce qu'on utilise pour exprimer un en fonction de n et de u_0.

Ex : On peut exprimer la suite précédente en fonction de n : $u_n = 3 + 4n$.

Propriété : Si on ne connait pas u_0, on peut trouver u_n à partir de n'importe quelle autre valeur de la suite à l'aide de la formule : $u_n = u_p + (n-p)\times r$

Ex : u5 = 15 et r = 7. Alors u0 = u5 + (0-5)×7 = 15 - 5×7 = -20

Méthode : comment trouver r si on connait u5 et u10 ?

$u_{10} = u_5 + (10-5)\times r$. Ceci nous permet de trouver r. Par exemple, si $u_5 = 10$ et $u_{10} = 25$, alors $25 = 10 + 5\times r$ donc r = 3.

III] Suites geometriques

Une suite est « **géométrique** » si on multiplie (ou divise) un terme par un nombre q (appelé raison) pour obtenir le terme suivant.

$u_{n+1} = u_n \times q$

Ex : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; … sont des termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q = 2 car on multiplie toujours par 2.

Propriété : Pour tout n, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Ex : On peut exprimer la suite v_n en fonction de n : $v_n = 1 \times 2^n$.

Propriété : Si on ne connait pas u_0, on peut trouver v_n à partir de n'importe quelle autre valeur de la suite à l'aide de la formule : $v_n = v_p \times q^{n-p}$

Ex : v5 = 1024 et $q = \frac{1}{2}$. Alors $v_{10} = v_5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10-5} = 1024\times\frac{1}{32} = 32$

Méthode : comment trouver q si on connait v5 et v7 ?

$v_7 = v_5 \times q^{7-5}$. Ceci nous permet de trouver q. Par exemple, si $v_5 = 10$ et $v_7 = 40$, alors $40 = 10 \times q^2$ donc $q^2 = 4$ et q = 2 ou -2.

IV] COMMENT DEMONTRER QU'UNE SUITE EST ARITHMETIQUE ? OU GEOMETRIQUE ?

On peut tout d'abord regarder les trois premiers termes et regarder à vue d'œil s'ils semblent correspondre à l'ajout d'un même nombre ou au produit d'un même nombre. **Cela peut donner une idée mais ne peut constituer une preuve !!!**

Ex : 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; … semblent être des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} =$…
Si on voit que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$*, on peut en déduire que la suite n'est pas géométrique.*
De même, si on voit que u2-u1 ≠ u1 – u0, c'est que la suite n'est pas arithmétique.

Par contre, pour prouver que la suite est arithmétique ou géométrique, il va falloir faire des calculs plus pénibles avec u_{n+1} et u_n.

Méthode : Comment montrer que un est arithmétique ?

Soit on peut expliciter un en fonction de n et on remarque que u_n = … + n × … auquel cas on a u_0 et r.

Sinon, on doit calculer $u_{n+1} - u_n$ et regarder si cette différence ne dépend pas de n.

Ex : Soient $u_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5)$ *et* $v_n = \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$
Vérifions que $b_n = u_n - v_n$ *est arithmétique.*
$b_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5 - 2^n + 4n - 5) = \frac{1}{4}(8n - 10) = 2n - 2{,}5$. *On reconnait ici* $b_n = -2{,}5 + n \times 2$ *ou alors on calcule :*
$b_{n+1} = 2(n+1) - 2{,}5 = 2n - 0{,}5$ *donc* $b_{n+1} - b_n = 2 = r$ *car ne dépend pas de n.*

Méthode : Comment montrer que vn est géométrique ?

Soit on peut expliciter vn en fonction de n et on remarque que v_n = … × …n auquel cas on a v_0 et q.

Sinon, on doit calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et regarder si ce quotient ne dépend pas de n.

Ex : Vérifions que $a_n = u_n + v_n$ *est géométrique.*
Calculons $a_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5 + 2^n - 4n + 5) = \frac{1}{4} \times 2 \times 2^n = \frac{1}{2} \times 2^n$.
On reconnait ici $a_n = \frac{1}{2} \times q^n$ *avec q = 2 ou alors on calcule*
$a_{n+1} = \frac{1}{2} \times 2^{n+1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^n$. *Donc* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 2^n}{\frac{1}{2} \times 2^n} = 2$ *donc* a_n *est géométrique de raison q = 2 car il n'y a plus de n.*

Parfois, les calculs sont plus pénibles car il y a des quotients avec mise au même dénominateur.

Ex : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ *et* $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

Calcul de $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - \frac{1+u_n}{1+u_n}}{\frac{2}{1+u_n} + 2\left(\frac{1+u_n}{1+u_n}\right)} = \left(\frac{1-u_n}{1+u_n}\right) \div \left(\frac{4+2u_n}{1+u_n}\right) = \left(\frac{1-u_n}{1+u_n}\right) \times \left(\frac{1+u_n}{4+2u_n}\right) = \left(\frac{1-u_n}{4+2u_n}\right)$ *après simplification.*

Il reste ensuite à calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} \div \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} \times \frac{u_n + 2}{u_n - 1} = \frac{-1}{2}$ *après simplifications.*

Donc v_n *est géométrique, de raison* $\frac{-1}{2}$.

Chap. 7 bis : Somme des termes d'une suite.

I] Somme des n premiers entiers :

Propriété : $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^{n} i$. Alors $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :

On écrit deux fois S_n mais à l'envers l'une de l'autre :

$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n-2 + n-1 + n$

$S_n = n + n-1 + n-2 + \dots + 3 + 2 + 1$. **On ajoute ces deux lignes. Cela donne :**

$2 \times S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$.

On remarque alors qu'on ajoute (n+1) et cela n fois (de 1 à n). Donc $2\times S_n = n\times(n+1)$ et $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

II] Somme des n premieres puissances :

Propriété : $T_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \sum_{i=1}^{n} q^i$. Alors $T_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration :

$T_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

$q \times T_n = q(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n)$

$q \times T_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{n+1}$.

En faisant $T_n - q\times T_n$, on remarque que beaucoup de termes s'annulent deux par deux.

$T_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cancel{\dots} + \cancel{q^n}$

$- q \times T_n = \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cancel{q^4} + \cancel{\dots} + q^{n+1}$. **Donc $T_n - q\times T_n = 1 - q^{n+1}$. Donc $(1 - q)\times T_n = 1 - q^{n+1}$. D'où la formule donnée.**

Application :Calcul des sommes des termes d'une suite géométrique

$u_n = u_0 \times q^n$

$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^n$

$= u_0(1 + q + q^2 + \dots + qn)$

$= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. **Donc $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$**

Ex : (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

$u_n = u_0 \times q^n$

Donc $T = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = \quad = u_0 \times \frac{1-q^{10+1}}{1-q} = 3 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = -3(1\text{-}2\,048) = 6\,141$.