Cours de 3ème

Identités remarquables et rappels de calcul littéral.

I- SIMPLE DISTRIBUTIVITE

Rappel :

On a : $\boxed{k \times (a + b) = k \times a + k \times b.}$

Chaque flèche représente un **×**.
Quand on est passé à la flèche suivante, on met un **+**

Exemple : $3 \times (x + 2) = 3 \times x + 3 \times 2$
$= \underline{3x + 6}$

II- DOUBLE DISTRIBUTIVITE

Rappel :

$(a + b)\times(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = ac + ad + bc + bd$

Exemple : $(3 + x)(y + 5) = 3 \times y + 3 \times 5 + x \times y + x \times 5$
$= \underline{3y + 15 + xy + 5x}$

III- FACTORISATION

Quand, dans une somme, on trouve deux fois le même facteur (x, 5, $(2x + 3)$, etc…), on peut le regrouper en faisant une « mise en facteur ».

Exemple : $xy + 3x = \underline{x}\times y + 3\times\underline{x} = \underline{x}(y+3)$

$6x + 15x^2 = \underline{\mathbf{3x}} \times 2 + \underline{\mathbf{3x}} \times 5x = \underline{\mathbf{3x}} \times (2 + 5x)$.

Il faut d'abord faire apparaitre le facteur commun. C'est **3x** .

$\underline{\mathbf{(x+3)}}(2x+5) + \underline{\mathbf{(x+3)}}(5x-9) = \underline{\mathbf{(x + 3)}}[(2x + 5) + (5x - 9)]$

$= (x+3)(7x - 4)$.

Le facteur commun est (x+3).

IV] LES IDENTITES REMARQUABLES

Propriété : Pour tout nombre a et tout nombre b, on a : $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2}$

Exemple : $(5x + 4) = (5x)^2 + 2\times(5x)\times 4 + 4^2 = \mathbf{25x^2 + 40x + 16}$

Pour calculer $(3x – 7)^2$, il suffit d'écrire que $(3x – 7)^2 = (3x + (-7))^2$.

Une autre identité remarquable permet de factoriser :

Propriété : $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a – b)}$

Exemple : $9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x + 2)(3x – 2)$.

Attention, il faut transformer $9x^2$ en a^2, c'est-à-dire $(3x)^2$ et 4 en b^2. b = 2.

PGCD de deux nombres

1. Definition du P.G.C.D.

Déf. : Les « **diviseurs communs** aux nombres a et b » sont les nombres qui divisent à la fois a et b.
Le Plus Grand Commun Diviseur de 2 nombres a et b est appelé **le « PGCD de a et b »**.
On le note **PGCD (a ; b).**

Exemple : Pour trouver le PGCD de 45 et 27, on peut :

- trouver tous les diviseurs de 45 : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45.
- trouver tous les diviseurs de 27 : 1 ; 3 ; 9 ; 27.
- trouver les diviseurs communs (1 ; 3 ; 9) puis le plus grand : 9. Donc **le PGCD est 9.**

2. Nombres premiers entre eux

Déf. : On dit que deux nombres sont « **premiers entre eux** » si leur PGCD vaut 1.
Deux nombres sont premiers entre eux si leur ***seul diviseur commun*** est 1.

Application : Pour montrer que deux nombres ne sont pas premiers entre eux, il suffit de trouver un nombre qui les divise tous les deux.

Exemple : 25 et 60 ne sont pas premiers entre eux car ils sont divisibles par 5.

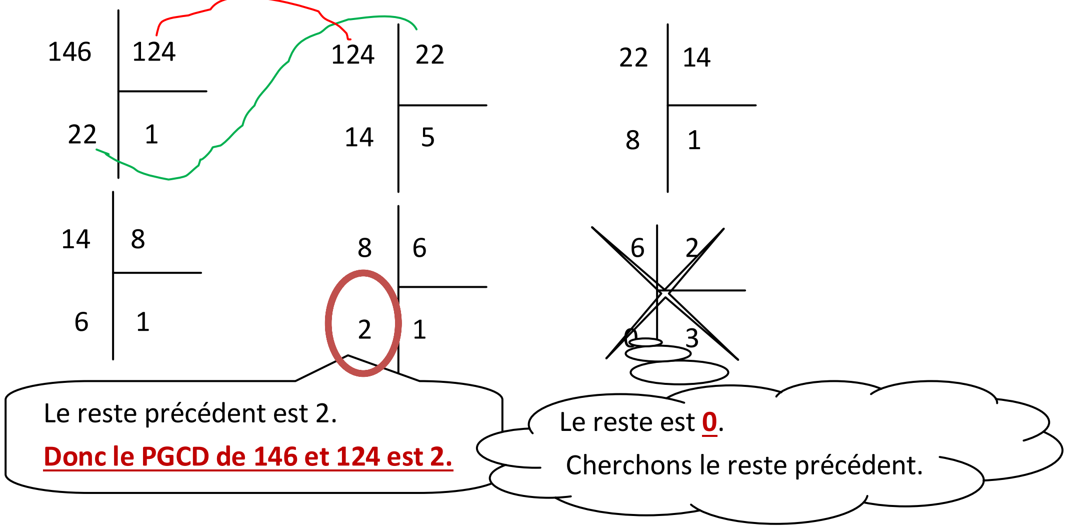
3. Algorithme d'EUCLIDE

L'algorithme d'Euclide permet de trouver le PGCD de deux nombres en effectuant une suite de divisions euclidiennes (avec reste et sans virgule).

Propriété | Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le **dernier reste non nul**. |

Exemple : Déterminer le PGCD de 124 et 146.

Je divise le plus grand nombre par le plus petit puis je continue comme indiqué ci-dessus.



4. Fractions irreductibles

Pour rendre une fraction **irréductible**, il suffit de calculer le PGCD du numérateur et du dénominateur.

Exemple : Rendre la fraction $\frac{288}{248}$ irréductible.

On calcule le PGCD de 288 et 248. On trouve 8. Donc $\frac{288}{248} = \frac{36}{31}$ (÷8 au numérateur et au dénominateur)

5. Resolution de « problemes »

Certains problèmes proposés se résolvent en utilisant le PGCD.

Exemple :
Un photographe doit réaliser une exposition de toutes ses photos sur des panneaux contenant chacun **le même nombre** de paysages et **le même nombre** de portraits. Il dispose de 288 paysages et 224 portraits.
Combien de panneaux pourra-t-il présenter **au maximum** ? Combien de paysages et de portraits seront alors exposés sur chaque panneau ?

Pour résoudre ce genre de problème (mots « maximum » ou « minimum », « même nombre » ou « identique », etc…), on doit utiliser le PGCD mais il faut expliquer pourquoi à l'aide de phrases.

<u>Résolution :</u> Je reprends la question. On demande le nombre de panneaux. Je commence donc par « Le nombre de panneaux … »

- Le nombre de panneaux doit diviser 288 et 224.
- Ce doit donc être un diviseur commun.
- On veut le maximum de panneaux. On cherche alors le PGCD de 288 et 224.
- *<u>Calcul du PGCD et réponse à la question</u>* : Le PGCD est 32. Le photographe pourra donc effectuer 32 panneaux maximum.
- *<u>Fin du problème</u>* : Sur chaque panneau, il y aura 9 paysages (288 : 32) et 7 portraits (224 : 32).

Les équations

1. Definitions

Définition 1 : Une « **équation** » est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu que l'on note généralement x.

Définition 2 : « **Résoudre une équation** », c'est chercher toutes les valeurs d'un nombre inconnu qui vérifient l'égalité proposée. Ces valeurs s'appellent des « **solutions de l'équation** ».

Méthode :

Trouver si un nombre est solution d'une équation (savoir J.1) Le nombre -2 est-il solution de l'équation $3x + 5 = 2x + 1$?
On remplace tous les x par -2 et on effectue le calcul des deux membres, séparément :

Membre de gauche :	***Membre de droite :***
$3 \times (-2) + 5 = -1$	$2 \times (-2) + 1 = -3$

Les valeurs des deux membres sont différentes, **donc -2 n'est pas solution de cette équation.**

2. Resolution d'une equation (savoir J.3)

Principe :
Pour une équation du type $2x + 5 = 7x - 3$, il faut mettre tous les termes en x à gauche et tous les nombres à droite, de manière à se retrouver avec une équation du type $\alpha x = \beta$. ***La solution est alors*** $\boldsymbol{x = \frac{\beta}{\alpha}}$.

Exemple :

$2x + 5 = 7x - 3$

Le +5 de gauche et le $7x$ de droite ne sont pas à leur place.

$2x - 7x = -3 - 5$

Le $7x$ était à droite du signe égal, il passe à gauche et se transforme en $-7x$.
Même chose pour le +5 qui se transforme en -5 en passant à droite.

$-5x = -8$

$x = \frac{-8}{-5}$

Conclusion : $\boxed{\textbf{La solution de l'équation est } \frac{8}{5} \textbf{ ou } 1,6}$.

3. Equations produit nul

On appelle « équation produit nul » une équation du type $(3x + 5)(4x - 2) = 0$

Propriété : **Un produit est nul si l'un des facteurs au moins est nul.**

Résolution : L'un des facteurs au moins doit être nul. C'est-à-dire $3x + 5 = 0$ ou $4x - 2 = 0$

On résout ces deux équations séparément : $x = -\frac{5}{3}$ ou $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Conclusion : **L'équation a deux solutions :** $-\frac{5}{3}$ **et** $\frac{1}{2}$.

Fonctions linéaires

1. Definition

Définition : Une **fonction linéaire** est un programme de calcul dans lequel on multiplie x par un nombre.

Exemples : f : $x \rightarrow 3x$ est une fonction linéaire de coefficient 3

g : $x \rightarrow -\frac{5}{4}x$ est une fonction linéaire de coefficient $-\frac{5}{4}$

h : $x \rightarrow 4x - 2$ n'est pas une fonction linéaire (il y a -2)

i : $x \rightarrow \frac{5}{x}$ et j : $x \rightarrow 3x^2$ ne sont pas non plus des fonctions linéaires.

2. Proportionnalite

Une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité.

Le tableau représentant les images de la fonction est donc un tableau de proportionnalité.

Exemple :

Antécédent	x	3	5	0	2
Image	f(x)	15	25	0	10

× 5

Ce tableau représente la fonction linéaire de coefficient 5.
L'image de 2 est 10. L'antécédent de 15 est 3.
On peut passer de la seconde ligne à la première **en divisant le nombre par 5** (15 ÷ 5).

Une fonction linéaire est représentée par une droite qui passe par l'origine.
Remarque : *Quand le coefficient est positif, la droite monte et quand le coefficient est négatif, la droite descend.*

3. Pourcentages

On peut représenter une augmentation ou une diminution à l'aide d'une fonction linéaire.
Une augmentation de 12% est représentée par la fonction f : $x \rightarrow 1{,}12\,x$ (1+ 0,12) car 112% (100%+12%).
Une diminution de 26% est représentée par la fonction g : $x \rightarrow 0{,}84\,x$ (1 – 0,26) car 84% (100% - 26%).

Si on a un exercice où on demande le prix final en fonction du prix de base, après diminution ou augmentation, cela revient à **calculer l'image** du nombre par la fonction.
Si on cherche le prix avant réduction ou augmentation, on **cherche l'antécédent** (avant modification).

Exemples :

1) Un objet coûte 25 € avant réduction de 30%, combien sera le prix final ?

On a une diminution de 30%, c'est associé à la fonction linéaire 0,70 x. On cherche l'image de 25 par cette fonction.
On fait alors 25 x 0,70 = 17,5 €.

2) Un objet coûte 33 € après augmentation de 10%, quel était son prix initial ?

On a une augmentation de 10% qui correspond à la fonction linéaire 1,10 x.
On cherche l'antécédent de 33. On divise alors 33 par le coefficient 1,10.
33 : 1,1 = 30 €.

Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction dans laquelle on multiple x par un nombre puis on ajoute (ou on soustrait) un nombre. f : x → ax + b

a est le « coefficient directeur » ou la « pente » et b est l' « ordonnée à l'origine ».

Ex : $3x + 5$ est une fonction affine. a = 3 et b = 5.

$2x^2 + 7$ n'est pas une fonction affine (x^2)

$3x$, $x - 7$ et 7 sont des fonctions affines ($3x + 0$, $1x - 7$ et $0x + 7$).

Une fonction affine sert en général à représenter une situation dans laquelle on trouve un tarif de base augmenté de quelque chose qui varie.

Ex : Un tarif de 40€ et les suppléments de 0,30€ par minute supplémentaire.

Cette fonction affine s'exprime par « t : x -> 0,3 x + 40 »

Calcul d'image :

On remplace toujours x par la valeur demandée.

Ex *: f : x* → *2 x* + 4. Image de -5.

$f(-5) = 2\times(-5) + 4 = -10 + 4 = 6$. L'image de -5 par f est 6.

Calcul d'antécédent :

On résout une équation. On cherche la valeur x pour que *$f(x) = 4$ si on cherche l'antécédent de 4.*

Ex *: On cherche x tel que $f(x) = 4$, c'est-à-dire $2x+4 = 4$.*

$2x = 0$ donc $x = 0$. L'antécédent de 4 par f est 0.

Représentation graphique :

Une fonction affine est représentée par une droite qui ne passe en général pas par l'origine.

On peut lire a et b sur la droite :

b se lit sur l'axe des ordonnées (pour x = 0)

a se lit en augmentant de 1 sur les abscisses. On augmente alors de a sur les ordonnées.

Les probabilités

1. VOCABULAIRE

Définition : On appelle « **expérience aléatoire** » une expérience dont on ne peut prévoir avec certitude le résultat.

Définition : Les différents résultats possibles sont appelés les « **issues de l'expérience** ». On parlera aussi « **d'évènement élémentaire** ».

Définition : On appelle « **évènement** » un ensemble d'issues.

Exemple : Un jet de dé est une expérience aléatoire. Les issues sont les nombres de 1 à 6 et voici plusieurs évènements : « *Trouver un 4* », « *trouver un nombre pair* », etc…

2. PROBABILITE D'UN EVENEMENT

Propriété : La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

Définition : Un « **évènement certain** » est un évènement qui est toujours réalisé. Sa probabilité est 1.

Définition : Un « **évènement impossible** » est un évènement qui n'est jamais réalisé. Sa probabilité est 0.

3. EQUIPROBABILITE

On parlera de « **situation d'équiprobabilité** » si toutes les issues ont la même probabilité.

4. ARBRE DE PROBABILITE

Dans des situations où on a deux expériences ou plus, on peut fabriquer un arbre pour répondre.
Pour aller au bout d'une « branche », on multiplie les probabilités que l'on croise tout au long de cette branche.
Pour calculer la probabilité d'événements qui se trouvent sur plusieurs branches, on ajoute les probabilités de chaque branche.

Puissances

1. Operations et puissances

Pour faire des opérations de la même puissance, on remarque qu'on peut utiliser des astuces pour calculer plus vite.

Exemple de calcul : $\mathbf{8^3 \times 8^2 = (8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8) = 8^5 (= 8^{3+2})}$

On peut aussi utiliser la formule suivante :

Produit de puissances : $\boxed{\mathbf{a^n \times a^p = a^{n+p}}}$

Exemple de calcul : $\mathbf{\dfrac{6^9}{6^5} = \dfrac{\cancel{6}\times\cancel{6}\times\cancel{6}\times\cancel{6}\times\cancel{6}\times 6\times 6\times 6\times 6}{\cancel{6}\times\cancel{6}\times\cancel{6}\times\cancel{6}\times\cancel{6}} = 6^4 (= 6^{9-5})}$

On peut aussi utiliser la formule suivante :

Quotient de puissances : $\boxed{\mathbf{\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}}}$

Exemple de calcul : $\mathbf{(3^2)^6 = 3^{2\times 6}}$

On peut aussi utiliser la formule suivante :

Puissance de puissances : $\boxed{\mathbf{(a^n)^p = a^{n\times p}}}$

2. Ecriture scientifique

On peut écrire tout nombre sous différentes formes (décimale, sous forme d'un entier multiplié par une puissance de 10, etc …)

Exemple : Voici 4 façons d'écrire le même nombre : 13 400 = 134 × 10^2 = 1 340 × 10 = 134 000 × 10^{-1}

Une forme qui est à retenir est l' « **écriture scientifique** » : un nombre décimal avec un seul chiffre devant la virgule (différent de 0) multiplié par une puissance de 10.

Exemple : 13 400 s'écrit 1,34 × 10^4 (On ne garde que le premier chiffre, différent de 0, devant la virgule puis la puissance de 10 est trouvée en regardant combien de chiffres après le premier)

3. Priorites de calcul

Les règles de priorités restent les mêmes : on effectue tout d'abord les puissances de puissance puis les multiplications et les divisions.

Exemple : A = $5 \times (6 + 5) - (2 - 5)^2$

A = $5 \times 11 - (-3)^2$

A = $55 - (+9)$

$\boxed{\textbf{A = 46}}$

Racines carrées

1. Definition :

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre **positif** noté $\sqrt{a}$ qui, élevé au carré, donne a.

Pour $a \geq 0$, on $(\sqrt{a})^2 = a$ **et** $\sqrt{a^2} = a$

Exemples : $\sqrt{4} = 2$ car $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

Attention : Le nombre **sous** la racine doit toujours être **positif.**

2. Operations et racines carrees-Multiplication et division :

1. Multiplication :	2. Division :
$\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$	Pour $b \neq 0$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
Exemple : $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3}$ $= \sqrt{5^2} \times \sqrt{3}$ $= 5 \times \sqrt{3} = \mathbf{5\sqrt{3}}$	***Exemples*** : $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{3}{27}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$ $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

3. Développement avec des racines carrées :

On peut utiliser les formules pour développer des expressions contenant des racines carrées :

Exemple : $3(\sqrt{5} + 1) = \mathbf{3\sqrt{5} + 3}$

$\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 5) = (\sqrt{2})^2 - 5\sqrt{2} = \mathbf{2 - 5\sqrt{2}}$

$(1 + \sqrt{3})\,(1 - \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = \mathbf{-2}$

3. Decomposition d'un nombre en facteurs premiers et simplification

Pour décomposer un nombre en facteurs premiers, on le divise par 2, 3, 5, 7, 11 autant de fois que c'est possible en commençant par les plus petits jusqu'à ce que la division ne soit plus possible (résultat avec virgule).

Exemple : Décomposer 36 en facteurs premiers :

36	2	36 se divise par 2 et donne 18
18	2	18 se divise par 2 et donne 9.
9	3	9 ne se divise pas par 2 mais par 3. Ca donne 3
3	3	etc… jusqu'à ce qu'il reste 1.
1		

On a alors la décomposition $\mathbf{36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2}$.

On peut alors utiliser cette décomposition pour simplifier une racine carrée, c'est-à-dire pour réduire le nombre qui est sous le radical au maximum.

Exemple : Je dois simplifier $\sqrt{27}$. Décomposons d'abord 27 en facteurs premiers. On obtient $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$. On écrira plutôt $27 = 3^2 \times 3$ (on regroupe les paires seulement).

on utilise ici $\sqrt{a^2} = a$

On écrit alors : $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = \mathbf{3\sqrt{3}}$

4. Additions et soustractions

Exemple : $A = 5\sqrt{27} + 6\sqrt{12}$. Ecrire A sous la forme $a\sqrt{3}$

On ne peut pas ajouter ainsi $\sqrt{27}$ et $\sqrt{12}$ car on ne peut ajouter que des racines semblables. Par contre, en simplifiant les racines, on pourra les ajouter.

$A = 5 \times 3\sqrt{3} + 6 \times 2\sqrt{3} = 15\sqrt{3} + 12\sqrt{3}$ $\mathbf{= 27\sqrt{3}}$

5. La racine carree, solution d'une equation

L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions qui sont $\boldsymbol{x = \sqrt{a}}$ **et** $\boldsymbol{x = -\sqrt{a}}$

Exemple : L'équation $x^2 = 4$ possède deux solutions : $x = 2$ et $x = -2$

L'équation $x^2 = 6$ possède deux solutions : $x = \sqrt{6}$ et $x = -\sqrt{6}$

Vitesse et conversion de temps

Pour calculer dans un problème avec une vitesse, soit on utilise la formule v = $\frac{d}{t}$ en faisant attention aux unités, soit on utilise la proportionnalité.

En effet, voici un exemple :

<u>Exercice</u> : *Un cycliste roule à la vitesse de 15 km/h et doit parcourir 6 km. Combien de temps a-t-il roulé ?*

15 km	1 heure
6 km	???

⇐ On écrit la signification de 15 km/h : on parcourt 15 km en 1 heure.

Pour trouver le nombre manquant, on utilise alors **<u>le produit en croix</u>** : ??? = $\frac{6 \times 1}{15} = 0{,}4$ heure.

Il reste en général à convertir le temps en heure(s)/minutes : **0,4 heure = 0h24 minutes** (on prend le nombre entier, c'est le nombre d'heures puis on multiplie le nombre après la virgule, dixième, par 6)

<u>Exercice</u> : *Un cycliste roule pendant 14 minutes sur un parcours de 8 km. Quelle est la vitesse moyenne ?*

On peut à nouveau remplir un tableau :

???	1 h = 60 min
8 km	14 minutes

⇐ On cherche alors la distance parcourue en 1 heure, c'est-à-dire 60 minutes pour trouver la vitesse.

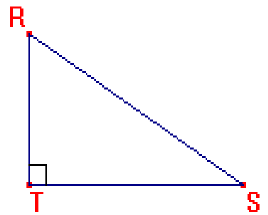
??? = $\frac{8 \times 60}{14} \simeq 34 \text{ km.h}^{-1}$.

Le théorème de Pythagore

6. I] Theoreme de Pythagore.

<u>Théorème de Pythagore</u> : Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des 2 côtés de l'angle droit.

<u>Exemple</u> :



Le triangle RST est rectangle en T.

Donc l'hypoténuse est le côté : [RS].

Le théorème de PYTHAGORE permet alors d'écrire l'égalité suivante :

$RS^2 = RT^2 + TS^2$

II] Methode : Comment utiliser le theoreme de PYTHAGORE pour calculer une longueur ?

<u>1ère étape</u> : Faire un schéma en n'oubliant pas de le coder (rapidement, à main levée).

<u>2ème étape</u> : Ecrire la phrase « Le triangle … est rectangle donc je peux utiliser le théorème de Pythagore » ou une autre semblable (rectangle+Pythagore)

<u>3ème étape</u> : Ecrire l'égalité de Pythagore. (Toujours l'hypoténuse d'abord.)

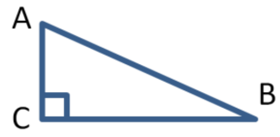
Attention aux carrés !!!

<u>4ème étape</u> : Remplacer les côtés donnés et faire les calculs des carrés pour obtenir une égalité

<u>5ème étape</u> : Une fois la longueur cherchée isolée, passer à la racine carrée

<u>6ème étape</u> : Conclure en faisant attention à ce qui est demandé (valeur exacte ou approchée)

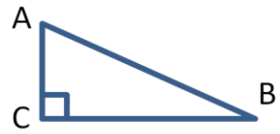
<u>1er exemple :</u>



AC = 3 cm et BC = 5 cm. Calcule AB en valeur exacte.

2) **Le triangle ABC est rectangle donc je peux utiliser le théorème de Pythagore.**
3) **L'hypoténuse est [AB] donc $AB^2 = AC^2 + CB^2$**
4) Je remplace par les nombres : **$AB^2 = 3^2 + 5^2$**
   J'effectue les calculs : **$AB^2 = 9 + 25$**
   $AB^2 = 34$
5) **Donc AB = $\sqrt{34}$**
6) Ici, on me demande la *<u>valeur exacte</u>*, donc je n'ai plus qu'à conclure :
   Le segment [AB] mesure donc $\sqrt{34}$ cm.

<u>2ème exemple :</u>



AB = 7 cm et BC = 5 cm. Calcule AC, arrondi au dixième.

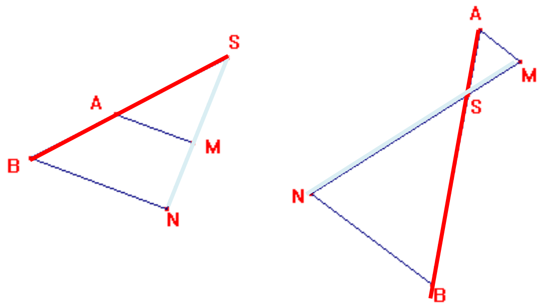
2) **Le triangle ABC est rectangle donc je peux utiliser le théorème de Pythagore.**
3) **L'hypoténuse est [AB] donc $AB^2 = AC^2 + CB^2$**
4) Je remplace par les nombres : **$7^2 = AC^2 + 5^2$**
   J'effectue les calculs : **$49 = AC^2 + 25$**
   $AC^2 = 49 – 25 = 24$
5) **Donc AC = $\sqrt{24}$**
6) Ici, on me demande la *<u>valeur arrondie</u>*, donc je n'ai plus qu'à conclure :
   Le segment [AC] mesure $\sqrt{24}$, c'est-à-dire environ 4,9 cm arrondi au dixième.

Théorème de THALES

1. THEOREME DE THALES

Le théorème de Thalès sert à calculer une longueur si on a 2 droites parallèles.

Voici les **2 situations de Thalès** : les points S, A et B ainsi que S, M et N doivent être **alignés**.



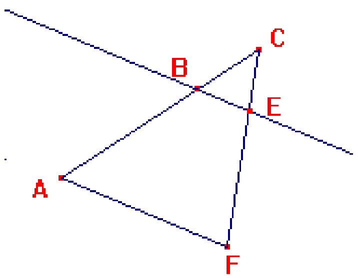
Théorème de Thalès :

Les points S, A, B et S, M, N sont alignés dans le même ordre.

Si les droites (AM) et (BN) sont parallèles, alors on a les égalités suivantes :

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SM}{SN} = \frac{AM}{BN}$$

Exercice résolu :Soit un triangle ACF avec AC = 5 cm et CF = 7 cm. Placer un point B sur (AC) tel que BC = 3 cm. Placer un point E sur AF tel que (BE) soit parallèle à (AF). Calculer CE :



Les points C, B, A et C, E, F sont alignés dans le même ordre.
Les droites (BE) et (AF) sont parallèles donc on utilise le théorème de Thalès.

On a alors : $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{CE}{CF} = \dfrac{BE}{AF}$

On remplace ensuite les valeurs que l'on connaît : $\dfrac{3}{5} = \dfrac{CE}{7} = \cancel{\dfrac{BE}{AF}}$.
(La dernière ne sert pas car on ne connaît rien donc on la raye.)

Pour trouver CE, on utilise le produit en croix : $\boxed{\mathbf{CE} = \frac{3\times7}{5} = \mathbf{4{,}2\ cm}}$

2. COMMENT MONTRER L'EGALITE DE 2 FRACTIONS ?

Pour montrer que 2 fractions sont égales, alors on doit utiliser **le produit en croix**.

Ex : Pour montrer que $\dfrac{7}{14} = \dfrac{9}{18}$, il suffit de calculer 7×18 et 9×14.

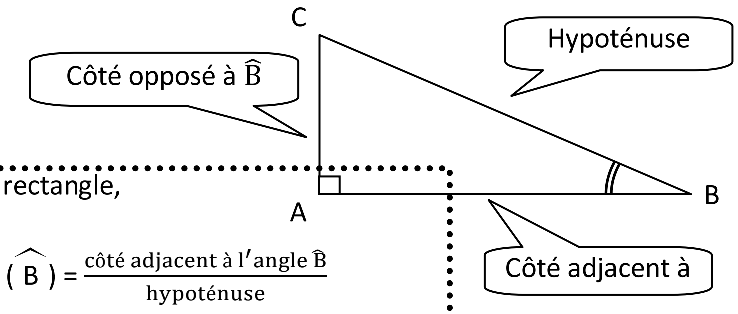
Si ces deux produits sont égaux, alors les fractions sont égales.

3. RECIPROQUE DU THEOREME DE THALES

Trigonométrie

1. Definitions

Définition :



Dans un triangle rectangle,

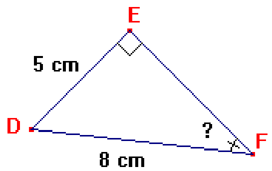
- cosinus ($\widehat{B}$) = $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$
- sinus ($\widehat{B}$) = $\dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$
- tangente ($\widehat{B}$) = $\dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à l'angle} \widehat{B}}$

Moyen mnémotechnique :

Apprendre par cœur « **SOH-CAH-TOA** » dont chaque lettre est l'initiale des différents mots des 3 formules.

2. Methode pour calculer la mesure d'un angle

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\mathbf{DFE}}$ au degré près.



On sait que le triangle DEF est rectangle en E.
Donc je peux utiliser la trigonométrie.

DE = 5 cm (opp à $\hat{F}$)   DF = 8 cm (hyp)

On utilise le sinus car c'est la relation qui relie opp. et hyp.

Donc, on a : $\sin(\widehat{\mathrm{DFE}}) = \dfrac{\text{opp.à } \hat{\mathrm{F}}}{\text{hyp}} = \dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DF}} = \dfrac{5}{8}$

D'où $\widehat{\mathrm{DFE}}$ = Arcsin(5 : 8).

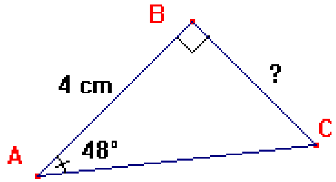
On obtient l'Arcsin à la calculatrice à l'aide des touches 2^nde^ + sin

$\widehat{\mathrm{DFE}} \approx 39°$

<u>Donc l'angle $\widehat{\mathbf{DFE}}$ mesure environ 39°, arrondi au degré près</u> (comme demandé dans la question).

3. Methode pour calculer une longueur

Calculer la longueur BC au millimètre près.



On sait que le triangle ABC est rectangle en B.
Donc je peux utiliser la trigonométrie.

$\widehat{BAC}$= 48°, AB = 4 cm(adj. à $\hat{A}$) et BC (opp. à $\hat{A}$).

On utilise la tangente car c'est la relation qui relie adj. et opp.

tan ($\widehat{\mathrm{BAC}}$) = $\dfrac{\text{opp.à } \hat{\mathrm{A}}}{\text{adj.à } \hat{\mathrm{A}}} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$

On cherche BC. On utilise le produit en croix.

Donc BC = AB × tan ($\widehat{\mathrm{BAC}}$)

BC = 4 × tan (48°).   BC ≈ 4,4

<u>Donc le segment [BC] mesure environ 4,4 cm, arrondi au millimètre près</u> (comme demandé dans l'énoncé).

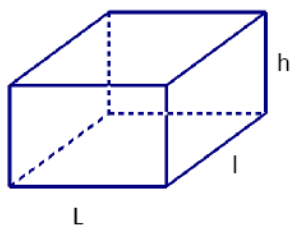
Les solides

LE PAVE DROIT

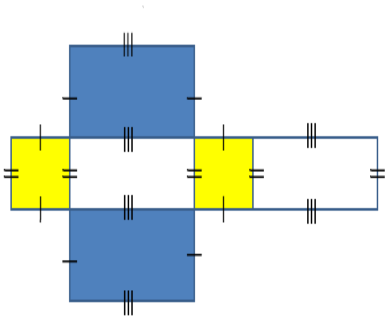
Définition:

Le «**pavé droit**» est un solide composé de 8 sommets, 6 faces qui sont des rectangles et 12 arêtes.

Perspective :



Patron :



Volume :

$\mathcal{V}_{(\text{pavé})} = L \times l \times h.$

Aire latérale :

L'aire latérale d'un pavé est la somme des aires des différentes faces du pavé.

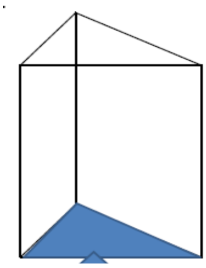
Rappel : $\mathcal{A}_{(\text{rectangle})} = L \times l$

LE PRISME

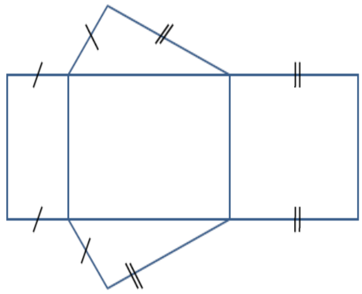
Définition:

Le «**prisme**» est un solide composé de 2 bases parallèles qui sont des polygones (plusieurs côtés).
Les faces latérales sont des rectangles.

Perspective :



Patron :



Volume :

$\mathcal{V}_{(\text{prisme})} = \mathcal{A}_{(\text{base})} \times h$

Aire latérale :

L'aire latérale d'un prisme est la somme des aires des rectangles qui composent ses côtés.

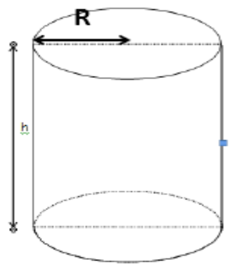
Rappel : $\mathcal{A}_{(\text{triangle})} = \frac{\text{base} \times h}{2}$

LE CYLINDRE

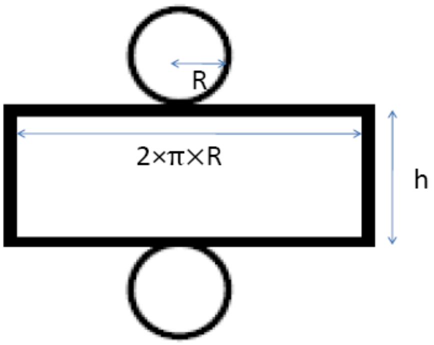
Définition :

Un «**cylindre**» est un empilement de disque de même rayon. Il possède donc deux faces parallèles qui sont des disques de rayon R.

Perspective :



Patron :



Volume

$\mathcal{V}_{(\text{cylindre})} = \pi \times r^2 \times h$

Aire latérale

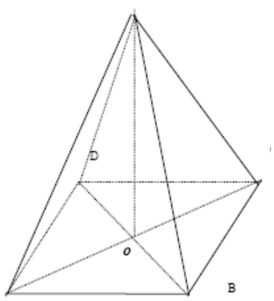
$\mathcal{A}_{(\text{latérale du cylindre})} = \mathcal{A}_{(\text{rectangle})} + \mathcal{A}_{(\text{disques})}$
$= 2 \times \pi \times r \times h + 2 \times \pi \times r^2$

LA PYRAMIDE

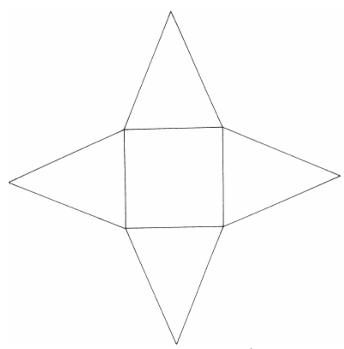
Définition :

Une «**pyramide**» est un solide dont les faces sont des triangles ayant un sommet en commun : le sommet de la pyramide.
La base de la pyramide est un polygone quelconque.

Perspective :



Patron :



Volume :

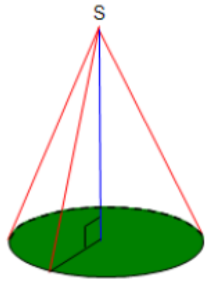
$\mathcal{V}_{(\text{pyramide})} = \frac{A(\text{base}) \times h}{3}$

LE CONE

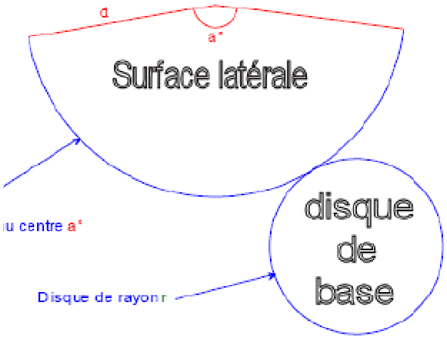
Définition :

Un «**cône de révolution**» est un solide que l'on obtient en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un des cotés de l'angle droit.

Perspective :



Patron :



Volume :

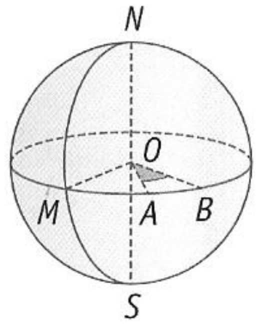
$$\mathcal{V}_{(\text{cône})} = \frac{\text{A(base)} \times \text{h}}{3} = \frac{\pi \times \text{r}^2 \times \text{h}}{3}$$

LA SPHERE

Définitions :

La «**sphère**» est l'ensemble des points de l'espace qui sont à la même distance d'un point (le centre).
Une «**boule**» est une sphère à laquelle on ajoute tous les points qui sont à l'intérieur de la sphère. (elle est pleine)

Perspective :



Patron :

Il n'y a pas de patron.

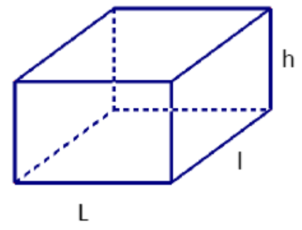
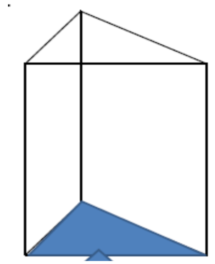
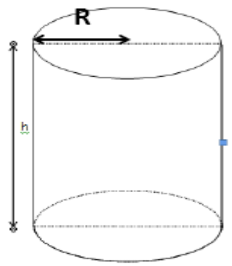
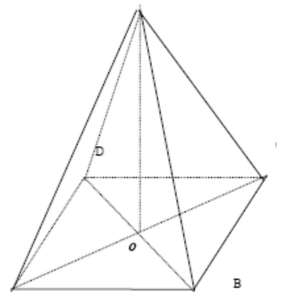
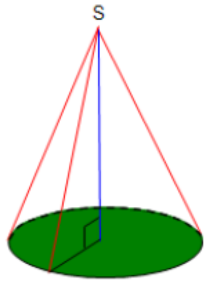
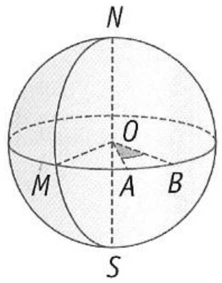
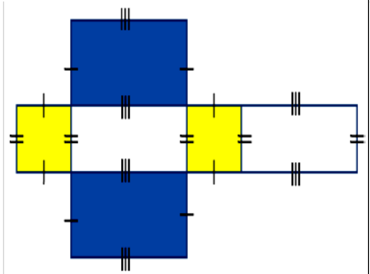
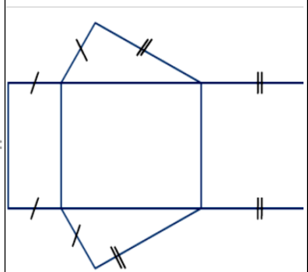
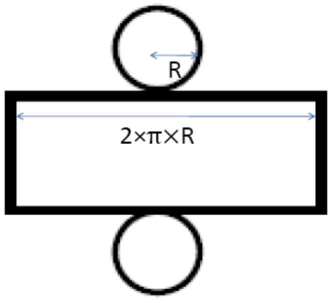
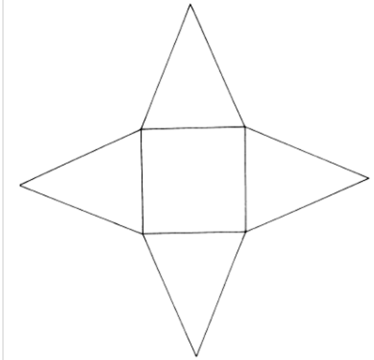
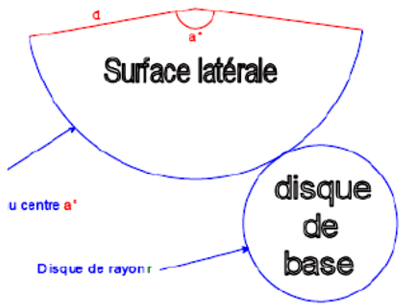
Volume :

$$\mathcal{V}_{(\text{boule})} = \frac{4 \times \pi \times \text{r}^3}{3}$$

Aire :

$$\mathcal{A}_{(\text{sphère})} = 4 \times \pi \times \text{r}^2$$

Les solides (bilan)

Nom	Pavé (ou parallélépipède rectangle)	Prisme droit	Cylindre	Pyramide	cône	Sphère
Perspective						
faces	6 rectangles	2 bases polygonales identiques + des faces rectangulaires	Deux disques de base	Une base polygonale et des faces triangulaires	Un disque de base	
Patron						
Volume	$= L \times l \times h$	$= \text{Aire}_{(\text{base})} \times h$	$= \text{Aire}_{(\text{disque})} \times h$ $= \pi \times r^2 \times h$	$= \dfrac{\text{Aire (base)} \times h}{3}$	$= \dfrac{\text{Aire (disque)} \times h}{3}$ $= \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$	$= \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

Comment montrer qu'un triangle est rectangle ?

1) Si on connait les 3 longueurs des côtés ➔ Réciproque (contraposée) du théorème de Pythagore.

On calcule le carré de la plus grande longueur
On calcule le carré des deux plus petits côtés et on les ajoute
Si les deux valeurs sont égales, la réciproque du théorème de Pythagore permet de montrer que le triangle est rectangle
Sinon, la contraposée (ou les conséquences) du théorème de Pythagore permet de montrer que le triangle n'est pas rectangle.

Ex : ABC tel que AB = 4 cm, AC = 5 cm et BC = 3 cm.
ABC est-il rectangle ?

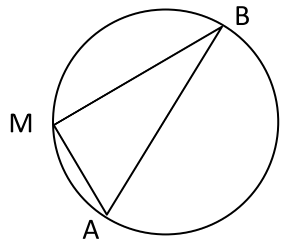
Le plus grand nombre est 5. $AC^2 = 5^2 = 25$

$AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25.$

On a $AC^2 = AB^2 + BC^2$*. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle (en B).*

2) Si on connait moins de 3 longueurs de côtés + un cercle ➔ Triangle rectangle inscrit dans un cercle

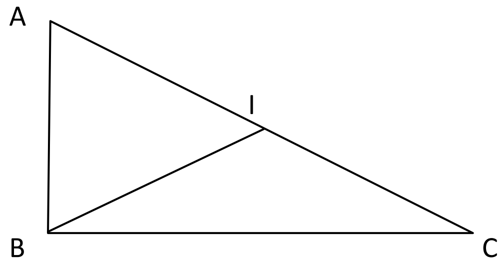
Un diamètre + un point du cercle forment un triangle rectangle.



Ex : [AB] est un diamètre, M est un point du cercle. Donc ABM est rectangle en M.

3) Si on connait la longueur d'un côté et la longueur de la médiane de ce côté.

Si la longueur de la médiane est égale à la moitié de la longueur du côté, alors il existe un cercle qui passe par les trois sommets du triangle et le diamètre est la côté connu. Le triangle est alors rectangle.



Si [BI] mesure la moitié de [AC], alors le triangle est rectangle en B